② PDEs 2^te Ordnung

$$\left[A\partial_x^2 + B\partial_x\partial_y + C\partial_y^2 + D\partial_x + E\partial_y + F\right]u = R$$

ist allgemeinste Form.

Für gegebenes (x,y) heißt die Gl.

$$\left.\begin{array}{l}\text{hyperbolisch}\\ \text{parabolisch}\\ \text{elliptisch}\end{array}\right\}\text{ wenn }\left\{\begin{array}{l}B^2 > 4AC\\ B^2 = 4AC\\ B^2 < 4AC\end{array}\right.$$

Die Gl. ist dann hyperbol. / parabol. / ellipt. in bestimmten Gebieten in der x,y-Ebene.

⇝ sehr allg. Gleichung, kann so nicht gelöst werden.

Zunächst Vereinfachungen:

- homogen $(R \equiv 0)$
- konstante Koeffizienten $A, B, \dots, F$ (unabh. von x,y)

Der Trick für 1^te Ordnung PDEs, Lösungen in der Form $f(p(x,y))$ zu finden, geht nur, wenn der Gesamt-Grad der Ableitungen immer gleich ist.

$\Rightarrow$ • $D = E = F = 0$

$$\Rightarrow \left(A\partial_x^2 + B\partial_x\partial_y + C\partial_y^2\right)u = 0 \qquad (*)$$

Bem: Wellengl.: $\partial_x^2 u - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u = 0$ ✓

Laplace-Gl.: $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ ✓

Diffusions-Gl.: $\kappa\partial_x^2 u - \partial_t u = 0$ nicht von dieser Form $(*)$

Annahme: $u(x,y) = f(p(x,y))$

⇝ Man kann einen Faktor $\partial_p^2 f(p)$ ausklammern?

Betrachte $\partial_x u = (\partial_p f)(\partial_x p)$

$\Rightarrow$ $\partial_x^2 u$ und $\partial_y\partial_x u$ liefern nicht einfach einen Faktor $\partial_p^2 f$, außer wenn $\partial_x p \equiv \text{const}$ (so daß $\partial_x^2 p = \partial_y\partial_x p \equiv 0$)

$\Rightarrow$ p muß linear in x sein

Analoges Argument für y: p muß linear in y sein

$\Rightarrow$ $p = ax + by$.

Also: $u(x,y) = f(ax+by)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_x u = a\,\partial_p f \\ \partial_y u = b\,\partial_p f \end{cases}, \quad \begin{cases} \partial_x^2 u = a^2\,\partial_p^2 f \\ \partial_x\partial_y u = ab\,\partial_p^2 f \\ \partial_y^2 u = b^2\,\partial_p^2 f \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \rightsquigarrow \underbrace{(Aa^2 + Bab + Cb^2)}_{\stackrel{!}{=}0} \partial_p^2 f(p) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2C}\left[-B \pm \sqrt{B^2-4AC}\right]$$

hier wird klar, warum wir die Gleichung nach Vorzeichen von B^2-4AC klassifizieren!

Wir nennen diese beiden Lösungen λ_1, λ_2.

$p_1 = x + \lambda_1 y, \quad p_2 = x + \lambda_2 y$

und $u(x,y) = f(x+\lambda_1 y) + g(x+\lambda_2 y)$

<u>Bem:</u> Hätten wir statt dessen $\partial_p^2 f = 0$ gefordert, hätten wir nur die Lösungen $u(x,y) = kx + ly + m$ gefunden, für die alle zweite Ableitung verschwinden.

<u>Beispiele:</u> • Wellengl: $\partial_x^2 u - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u = 0$ ($B^2 > 4AC$, ~~ellipt.!~~ hyperbol.)

entspricht $(*)$ mit $A=1, B=0, C=-\frac{1}{c^2}$.

$\Rightarrow 1 - \frac{\lambda^2}{c^2} = 0$ also $\lambda_{1,2} = \pm c$

$\Rightarrow p_1 = x - ct, \quad p_2 = x + ct.$

$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

• Laplace-Gl: $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$ ($B^2 < 4AC$, ~~hyperbol.!~~ ellipt.)

entspricht $(*)$ mit $A=C=1, B=0$.

$\Rightarrow 1 + \lambda^2 = 0$ also $\lambda_{1,2} = \pm i$

$$u(x,y) = f(x+iy) + g(x-iy) = f(z) + g(\bar{z})$$

• parabol. Fall $B^2 = 4AC$

$u(x,y) = f(x - \frac{B}{2C}y)$ da $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-B}{2C}$.

um eine zweite, unabhängige Lsg zu finden, machen wir den Ansatz:

$$u(x,y) = h(x,y)\, g\left(x - \frac{B}{2C} y\right)$$

$\Rightarrow$ (mit $A = \frac{B^2}{4C}$)

$$\left(A\, \partial_x^2 h + B\, \partial_x \partial_y h + C\, \partial_y^2 h\right) g = 0$$

h ist also eine beliebige (beliebig einfache) Lösung von (*).

$h = 1$ gibt unsere erste Lsg.

$h = x$ gibt eine weitere. (z.B.)

$$u(x,y) = f\left(x - \frac{B}{2C} y\right) + x\, g\left(x - \frac{B}{2C} y\right)$$

③ Mehr zu Wellengl.

$$u = f(x-ct) + g(x+ct)$$

$f(x-ct)$ stellt eine Welle ~~[illegible]~~ konstanter Form dar, die entlang der pos. x-Achse mit Geschw. c wandert. f bestimmt die Form der Welle

$g(x+ct)$ stellt ... die entlang der neg. x-Achse ....

$u =$ Superposition/Überlagerung dieser beiden Wellen.

$= \underbrace{\text{Auslenkung}}_{\text{transversale}}$ einer Saite an der Stelle x zu Zeit t.

Falls $f = g$, dann laufen identische Welle in entgegengesetzte Richtungen $\leadsto$ stehende Welle.

Sei z.B. $f = g = A\cos(kp + \varepsilon)$

k: Wellenzahl $= \frac{2\pi}{\text{Wellenlänge}}$

$kc = \omega$ Kreisfrequenz $= 2\pi\nu$

$$\Rightarrow u(x,t) = A\left[\cos(kx - kct + \varepsilon) + \cos(kx + kct + \varepsilon)\right]$$

$$= 2A\cos(kct)\cos(kx + \varepsilon)$$

Wellenform in x unabh. von t,

Amplitude variiert mit $\cos(kct)$ in der Zeit.

Punkte, für die $\cos(kx + \varepsilon) = 0$ heißen Knoten, dort findet zu keiner Zeit t eine Auslenkung statt.

Randbedingungen als Anfangsbedingungen:

$u(x,t=0) = \phi(x)$ initiale Auslenkung

$\partial_t u(x,t=0) = \psi(x)$ initiale Geschw.

$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$

$\Rightarrow u(x,0) = f(x) + g(x) = \phi(x)$ (I)

$\partial_t u(x,0) = -c f'(x) + c g'(x) = \psi(x)$ (II)

↑ das steht für $\partial_p f \big|_{p(x,t) = p(x,0)}$

Für (II): Wir sehen: $\frac{1}{c}\int_{p_0}^{p} \psi(q)\,dq + K = -f(p) + g(p)$ $\quad$ p_0 irrelevant, beliebig, K hängt von p_0 ab.

(I) und (II) $f(p) = \frac{\phi(p)}{2} - \frac{1}{2c}\int_{p_0}^{p} \psi(q)\,dq - \frac{K}{2}$ $\quad ; p = x-ct$

$$g(p) = \frac{\phi(p)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{p_0}^{p} \psi(q)\,dq + \frac{K}{2} \quad ; p = x+ct$$

und so: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x-ct) + \phi(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(q)\,dq$

(und Abhängigkeit von p_0 fällt weg)

in 3 Dimensionen: $\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)u = 0$

$p = lx + my + nz + \mu t$ lineare Ansatz.

$u(x,y,z,t) = f(p)$ ist ok, falls

$\left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{\mu^2}{c^2}\right)\partial_p^2 f = 0$

$\Rightarrow f$ ist beliebig mit $l^2 + m^2 + n^2 = \frac{\mu^2}{c^2}$

Wir wählen $\mu = \pm c$ und normieren $\underline{l^2 + m^2 + n^2 = 1}$

$p = \hat{n}\cdot\vec{r} \pm ct$

$u(\vec{r},t) = f(\hat{n}\cdot\vec{r} - ct) + g(\hat{n}\cdot\vec{r} + ct)$

l, m, n = kartesische Komponente eines Einheitsvektors $\hat{n}$, der in Richtung der Ausbreitung der Welle zeigt.

④ Mehr zur Diffusions-Gl.

• unterschiedl. Grad in den Ableitungen nach Orts-Koord. und Zeit!

$$\kappa\, \partial_x^2\, u(x,t) = \partial_t u \qquad [\kappa] = m^2 s^{-1} \qquad (*)$$

$u(x,t) = f(p)$, $p = ax + bt$ funktioniert nicht, da wir $f(p)$ nicht ausfaktorisieren können.

▶ Trick: Setze beide Seiten gleich eine Konstante α

$$\begin{cases} \partial_x^2 u = \dfrac{\alpha}{\kappa} \\ \partial_t u = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u(x,t) = \dfrac{\alpha}{2\kappa} x^2 + x\, g(t) + h(t) \\ u(x,t) = \alpha t + m(x). \end{cases}$$

Diese beiden Lösungen passen zueinander wenn

$$g(t) \equiv g = \text{const},$$
$$h(t) = \alpha t$$
$$m(x) = \frac{\alpha}{2\kappa} x^2 + g x$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \frac{\alpha}{2\kappa} x^2 + g x + \alpha t + \text{const}$$

▶ Kombination der unabhäng. Variablen.

$[\kappa] = m^2 s^{-1} \Rightarrow \eta = \dfrac{x^2}{\kappa t}$ ist dimensionslos!

$$u(x,t) = f(\eta) \; ?$$

zunächst:
$$\left.\begin{cases} \partial_x u = \partial_\eta f\, \partial_x \eta = \dfrac{2x}{\kappa t} \partial_\eta f \\ \partial_x^2 u = \dfrac{2}{\kappa t} \partial_\eta f + \left(\dfrac{2x}{\kappa t}\right)^2 \partial_\eta^2 f \\ \partial_t u = -\dfrac{x^2}{\kappa t^2} \partial_\eta f \end{cases}\right\} \text{Einsetzen in } (*):$$

$$\Rightarrow \quad 4\eta\, \partial_\eta^2 f + (2+\eta)\, \partial_\eta f = 0 \qquad \text{hängt nur von } \eta \text{ ab}$$

$$\left[\begin{aligned} &\kappa \left(\frac{4x^2}{\kappa^2 t^2}\right) \partial_\eta^2 f + \frac{2}{t} \partial_\eta f = -\frac{x^2}{\kappa t^2} \partial_\eta f \qquad \big|\, t \cdot \\ &4 \frac{x^2}{\kappa t} \partial_\eta^2 f + 2 \partial_\eta f = -\frac{x^2}{\kappa t} \partial_\eta f \end{aligned}\right]$$

Gewöhnl. Dgl.! $\quad f' = \partial_\eta f$

$$\Rightarrow \quad \frac{f''}{f'} = -\frac{1}{2\eta} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \log\left(\sqrt{\eta}\, f'\right) = -\frac{\eta}{4} + \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad f' = \frac{A}{\sqrt{\eta}} \exp\left(\frac{-\eta}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(\eta) = A \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \exp\left(\frac{-\mu}{4}\right) d\mu$$

$x, t \geq 0$
$\Rightarrow \xi \geq 0$

Setze $\xi = \frac{\sqrt{\eta}}{2} = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \Rightarrow d\xi = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\eta}} d\eta$ und so

$$u(x,t) = f(\eta) = g(\xi) = \underbrace{B \int_{\xi_0}^{\xi} \exp(-v^2)\, dv}_{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)} .$$

Konstante

$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right)$ wenn $\xi_0 = 0$.
und $B = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

(damit ist $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ normiert)

Vie sieht so eine, z.B., Temperaturverteilung aus.
Alle Pkte mit $\frac{x}{\sqrt{t}} = \text{const}$ haben gleiche Temp.
Zu jeder Zeit t hat sich die Region mit einer bestimmten Temp. in Richtung der pos. x-Achse proportional zu $\sqrt{t}$ verschoben.
Das ist typisch für einen rein statistischen Prozess (Diffusion).

$t = 0 \Rightarrow \xi \to \infty$. $\quad u$ unabh. von x (außer für $x=0$):
Lsg ist eine räumlich gleichmäßige Temp. Verteilung

$x = 0 \Rightarrow u \equiv 0 \;\; \forall t$.

IV.4. Charakteristik & Existenz von Lösungen

Klassen von Randbedingungen mit
- eindeutiger Lsg.
- Klasse von Lsgn.
- keine Lsg.

1) 1te Ordnung PDEs

Allgemeine Form geschrieben als

(1) $$A(x,y)\,\partial_x u + B(x,y)\,\partial_y u = F(x,y,u)$$

Randbed. $u(x,y) = \phi(s)$ entlang einer Kurve C in xy-Ebene, parametrisiert als $x = x(s)$, $y = y(s)$, s = Bogenlänge

(2) $$\Rightarrow \partial_s u = \partial_x u\, \partial_s x + \partial_y u\, \partial_s y = \partial_s \phi$$

Wir können die beiden (inhomog.) simultanen lineare Gleichungen (1) und (2) nach $\partial_x u$ und $\partial_y u$ auflösen, falls

(3) $$\det\begin{pmatrix} \partial_s x & \partial_s y \\ A & B \end{pmatrix} \neq 0$$

An jedem Pkt in der xy-Ebene bestimmt diese Gl. (3) eine Menge von Kurven (Charakteristische Kurven / Charakteristiken), die

$$\boxed{B\,\partial_s x - A\,\partial_s y = 0}$$

erfüllen, bzw. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B(x,y)}{A(x,y)}$.

Aha! Die Charakteristiken sind genau die Kurven, für die für $u(x,y) = f(p)$ $p = \text{const}$ gilt.

Wir können $\partial_x u$ und $\partial_y u$ bestimmen, wenn die Kurve C liegt nicht auf einer Charakteristik. $u(x,y) = \phi(s)$ vorzugeben entlang C ist dann ausreichend, um die Lsg. (für die PDE + Randwertbed.) in der Nähe von C durch Taylorentwicklung zu bestimmen. Die Charakteristiken sind die Linien, entlang denen die Information über die Lsg $u(x,y)$ "propagiert".

Bsp: $(x\partial_x - 2y\partial_y)u = 0$

mit Randbed. $u(x=1,y) = 2y+1$ für $y \in [0,1]$.

Wir kennen bereits die allg. Form der Lsg.:

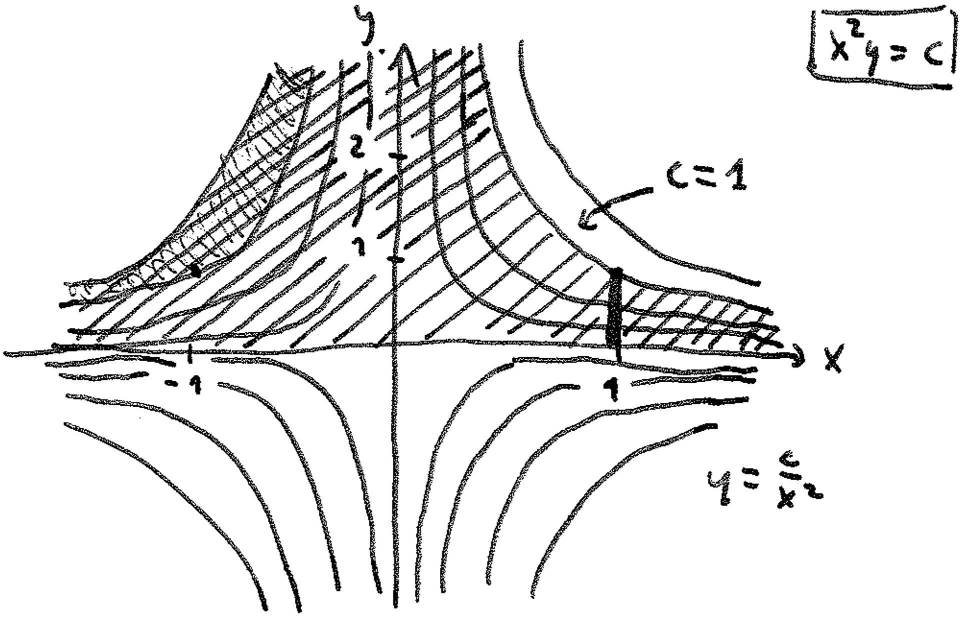
$$u(x,y) = f(p) = f(x^2y).$$

Charakteristiken sind die Kurven $x^2y = \text{const.}$

Wir finden auch eine spezielle Lsg. für das Randproblem

$$u(x=1,y) = 2y+1 \quad \forall y:$$

$$u(x,y) = 2(x^2y)+1.$$



Nun ist der Wert von x^2y durch die Randbed. nur zwischen $y=0$ und $y=1$ fixiert. Durch die Charakteristiken ist die Lsg. für alle Bereiche der (x,y) Ebene festgelegt, die von einer Charakteristik durchflossen werden, die das Liniensegment $y \in [0,1]$ bei $x=1$ schneiden.
Damit ist $u(x,y) = 2x^2y+1$ die korrekte Lsg. im schraffierten Bereich, der zu Werten $0 \le c \le 1$ gehört. Außerhalb kann die Lsg. anders aussehen:

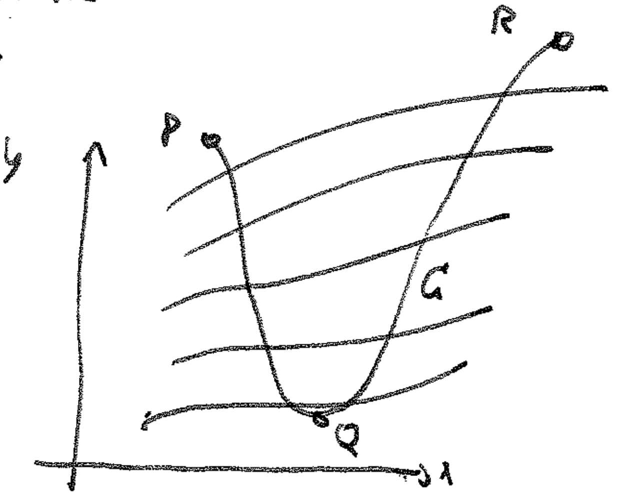
$$u(x,y) = 2x^2y+1+g(x^2y) \text{ mit}$$

$$g(p) = 0 \text{ für } 0 \le p \le 1.$$

Im Beispiel war die Randkurve keine Charakteristik, und zudem schnitt sie jede Charakteristik höchstens einmal.

2) Wenn Randkurve C = Charakteristik ist, dann ist die Lösung nicht eindeutig festgelegt (so, als ob wir die Lsg. nur an einem Pkt. vorgegeben hätten). Die Lösung kann nicht von C weg-propagieren. Die Lsg. ist dann außerhalb von C nicht festgelegt.

Die Randkurve C kann eine Charakteristik auch mehrmals schneiden.

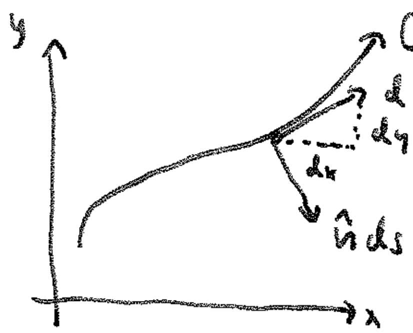


Teilstück PQ von C bestimmt bereits eine eindeutige Lsg. für alle Charakteristiken, die PQ schneiden. Gibt man die Lsg auch auf QR vor, so kann das Problem möglicherweise überbestimmt sein. Es existiert dann keine Lsg.

(2) PDEs 2ter Ordnung

Das Konzept der Charakteristiken verallgemeinert sich auf PDEs höherer Ordnung.

$$\left[A(x,y)\,\partial_x^2 + B(x,y)\,\partial_x\partial_y + C(x,y)\,\partial_y^2\right]u = F(x,y,u,\partial_x u,\partial_y u). \qquad (*)$$



Die häufigsten Arten von Randbedingungen sind

(i) Dirichlet: u ist für jeden Pkt des Randes vorgegeben

(ii) Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \hat{n}$ ist für jeden Pkt des Randes vorgegeben (Normalen-Ableitung).

(iii) Cauchy: u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ werden für jeden Pkt des Randes vorgegeben.

Zunächst Lsg von (*) mit Cauchy-Randbed.

C gegeben als $x = x(s)$, $y = y(s)$, s = Bogenlänge entlang C.

$$\begin{cases} u(x,y) = \phi(s) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \psi(s) \end{cases}$$ entlang C vorgegeben.

$$\begin{cases} d\vec{r} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y & \text{Tangentialvektor} \\ \hat{n}\,ds = dy\,\vec{e}_x - dx\,\vec{e}_y & \text{Normalenvektor.} \end{cases}$$

Auf C gilt damit

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \nabla u \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = (\partial_x u)(\partial_s x) + (\partial_y u)(\partial_s y) = \partial_s \phi(s)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \hat{n} = (\partial_x u)(\partial_s y) - (\partial_y u)(\partial_s x) = \psi(s)$$

Diese Gleichungen lassen sich sofort nach $\partial_x u$ und $\partial_y u$ auf C lösen. Mit

$$\frac{d}{ds} = (\partial_s x)\,\partial_x + (\partial_s y)\,\partial_y$$

können wir $\partial_x u$ und $\partial_y u$ differenzieren (entlang C)

$$\frac{d}{ds}(\partial_x u) = (\partial_s x)(\partial_x^2 u) + (\partial_s y)(\partial_x \partial_y u)$$

$$\frac{d}{ds}(\partial_y u) = (\partial_s x)(\partial_x \partial_y u) + (\partial_s y)(\partial_y^2 u)$$

Diese beiden Gleichungen plus (*) können wir nach $\partial_x^2 u$, $\partial_x \partial_y u$ und $\partial_y^2 u$ auflösen, solange

$$\det \begin{pmatrix} A & B & C \\ \partial_s x & \partial_s y & 0 \\ 0 & \partial_s x & \partial_s y \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$\det(\ldots) = A(\partial_s y)^2 - B(\partial_s x)(\partial_s y) + C(\partial_s x)^2 = 0$$

Multiplizieren mit $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2$ liefert

$$A(\partial_x y)^2 - B(\partial_x y) + C = 0$$

Dies ist eine gewöhnl. Dgl., die Dgl. für die Kurven in der xy-Ebene, entlang denen die zweiten Ableitungen von u nicht bestimmt werden können.

Diese Kurven heißen analog zum Fall der PDEs 1ter Ordnung Charakteristiken der PDE.

(Für $A \neq 0$) haben diese Kurven (die Charakteristiken) an jedem Pkt Tangenten gegeben als

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2A}\left[B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right]$$

- hyperbol.: zwei Familien reeller Kurven in der xy-Ebene.
- parabol.: eine –"– ...
- ellipt.: zwei Familien komplexer Kurven

- $A, B, C = \text{const}$, unabh. von x, y:
  Charakteristiken haben Form $x + \lambda y = \text{const}$,
  ~~wie im 1ter Ordnung Fall.~~

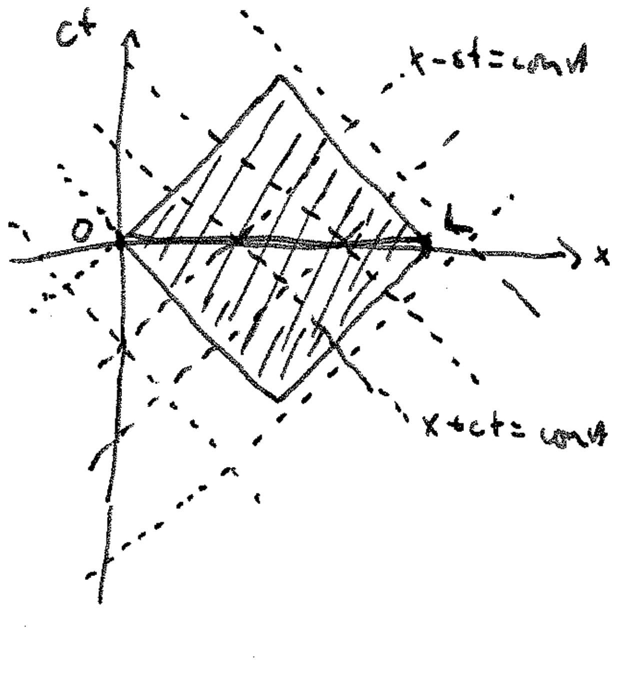
<u>Bsp:</u> Charakteristiken der 1-dim. Wellengl

$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)u = 0.$$

$A = 1,\ B = 0,\ C = -1/c^2$ hyperbolisch

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = c^2$$

Charakteristiken sind $x \pm ct = \text{const}$



Cauchy Problem vorgegeben auf $x \in [0, L]$, $t = 0$: Lsg bestimmt im schraffierten Bereich.

zwei Charakteristiken, entlang denen Teil-Information propagiert.
Randbed. auf Kurve C, muss für ~~das~~ Cauchy-Problem
so sein, daß C von beiden Charakteristiken geschnitten wird
(in jedem Pkt.)

Ansonsten, caveats wie im Fall 1ter Ordnung.

	Randkurve	Randbed.		
hyp.	offen	Cauchy		
parab.	offen	Dirichlet	oder	Neumann
ellipt	geschl.*	D	oder	N

*) C kann auch bei ∞ liegen, dann meist
$u = 0$ auf C oder
$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf C.

z.B. C = Kreis mit Radius $\to \infty$